

Компонент ОПОП 01.03.02 Прикладная математика и информатика

направленность (профиль) Системное программирование и компьютерные технологии

наименование ОПОП

Б1.О.14.05

шифр дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Дисциплины
(модуля)

Дифференциальные уравнения

Разработчик (и):

Левитес В. В.

ФИО

доцент кафедры ВМиФ

должность

канд. пед. наук

ученая степень,

звание

Утверждено на заседании кафедры

Высшей математики и физики

наименование кафедры

протокол № 6 от 22.03.2024

Заведующий кафедрой



подпись

Левитес В.В.

ФИО

1. Критерии и средства оценивания компетенций и индикаторов их достижения, формируемых дисциплиной (модулем)

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора(ов) достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)			Оценочные средства текущего контроля	Оценочные средства промежуточной аттестации
		<i>Знать</i>	<i>Уметь</i>	<i>Владеть</i>		
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИД-1ОПК-1 Использует аппарат фундаментальной математики для решения задач в области профессиональных интересов ИД-2ОПК-1 Использует фундаментальные математические знания для решения прикладных задач в профессиональной сфере	<ul style="list-style-type: none"> – математические основы теории дифференциальных и разностных уравнений; – основные аналитические и численные методы решения и исследования дифференциальных и разностных уравнений; – программные средства численного решения дифференциальных и разностных уравнений 	<ul style="list-style-type: none"> – применять эти знания в исследовательской и прикладной деятельности, требующей использования математического аппарата теории дифференциальных и разностных уравнений 	<ul style="list-style-type: none"> – основами математического моделирования прикладных задач, решаемых аналитическими методами; – навыками решения задач дифференциальных и разностных уравнений 	<ul style="list-style-type: none"> - комплект заданий для выполнения практических работ; - тестовые задания; - типовые задания по вариантам для выполнения контрольной работы 	<ul style="list-style-type: none"> Контрольная работа Индивидуальное домашнее задание тест лабораторная работа

2. Оценка уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)

Показатели оценивания компетенций (индикаторов их достижения)	Шкала и критерии оценки уровня сформированности компетенций (индикаторов их достижения)			
	Ниже порогового («неудовлетворительно»)	Пороговый («удовлетворительно»)	Продвинутый («хорошо»)	Высокий («отлично»)
Полнота знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущены не грубые ошибки.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки. Допущены некоторые погрешности.	Уровень знаний в объёме, соответствующем программе подготовки.
Наличие умений	При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Выполнены типовые задания с не грубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме (отсутствуют пояснения, неполные выводы)	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные задания с некоторыми погрешностями. Выполнены все задания в полном объёме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Задания выполнены в полном объеме без недочетов.
Наличие навыков (владение опытом)	При выполнении стандартных заданий не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для выполнения стандартных заданий с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при выполнении стандартных заданий с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Выполнены все основные и дополнительные задания без ошибок и погрешностей. Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.
Характеристика сформированности компетенции	Компетенции фактически не сформированы. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Зачетное количество баллов не набрано согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков достаточно для решения стандартных профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону	Сформированность компетенций полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в полной мере достаточно для решения сложных, в том числе нестандартных, профессиональных задач. ИЛИ Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону

3. Критерии и шкала оценивания заданий текущего контроля

3.1 Тест

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-100
Количество баллов за решенный тест	6	8	10

3.2 Контрольная работа

Баллы	Критерии оценивания
8	контрольная работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала)
6	контрольная работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета в выкладках или графиках, если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки
4	студент допустил более одной грубой ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках и графиках, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.
0	студент показал полное отсутствие обязательных знаний и умений по проверяемой теме

Примечание:

- К **грубым** ошибкам относятся незнание студентом формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять, незнание приемов решения задач, а также вычислительные ошибки, если они не являются опiskой.
- К **негрубым** ошибкам относятся вычислительные ошибки, если они являются опiskой, потеря решения уравнения или сохранение в ответе постороннего корня.
- К **недочетам** относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решении задания.

3.3 Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ)

Баллы	Характеристика индивидуального домашнего задания
4	Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено полностью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены без замечаний.
3	Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено полностью, при этом некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, но все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены, некоторые из них содержат негрубые ошибки.
2	Уровень расчетно-графической работы не отвечает большинству требований, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено частично, некоторые практические навыки работы не сформированы, отдельные предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены с грубыми ошибками.
0	Уровень выполнения ИДЗ показывает, что теоретическое содержание

	раздела дисциплины не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, все выполненные задания ИДЗ содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения заданий ИДЗ.
--	--

Требования, предъявляемые к выполнению ИДЗ:

- ИДЗ должно базироваться на знаниях теоретических и методических вопросах дисциплины «Дифференциальные уравнения». Работа должна содержать элементы творчества, новизны, направленные на эффективное решение заданий ИДЗ;
- ИДЗ должно отразить глубину теоретической подготовки студента, понимание контролируемого учебного материала по дисциплине «Математический анализ»: умение связывать теоретические положения с их практическим применением, способность самостоятельно формировать и обосновывать собственные выводы, логически и грамотно излагать свои мысли;
- в ИДЗ не допускается переписывание учебников, учебных пособий и других источников;
- Студент – автор ИДЗ полностью отвечает за предложенные решения заданий и правильность всех данных, приведенных в ИДЗ;
- ИДЗ должно быть сдано в назначенный руководителем срок.

3.4 Лабораторная работа

Баллы	Характеристика индивидуального домашнего задания
8	Полученные ранее знания для проведения анализа, опыта, эксперимента и выполнения последующих расчетов, а также составления выводов сформированы недостаточно. Лабораторная работа выполнена без замечаний.
6	Полученные ранее знания для проведения анализа, опыта, эксперимента и выполнения последующих расчетов, а также составления выводов сформированы. Лабораторная работа выполнена полностью, с небольшими без замечаний
4	Уровень выполнения лабораторной работы не отвечает большинству требований, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено частично, некоторые практические навыки работы не сформированы.
0	Уровень выполнения лабораторной работы, что теоретическое содержание раздела дисциплины, необходимые практические навыки не сформированы.

4. Критерии и шкала оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю) при проведении промежуточной аттестации

Критерии и шкала оценивания результатов освоения дисциплины (модуля) с зачетом

Если обучающийся набрал зачетное количество баллов согласно установленному диапазону по дисциплине (модулю), то он считается аттестованным.

Оценка	Баллы	Критерии оценивания
<i>Зачтено</i>	60 - 100	Набрано зачетное количество баллов согласно установленному диапазону
<i>Незачтено</i>	менее 60	Зачетное количество согласно установленному диапазону баллов не набрано

5. Задания диагностической работы для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю) в рамках внутренней и внешней независимой оценки качества образования

ФОС содержит задания для оценивания знаний, умений и навыков, демонстрирующих уровень сформированности компетенций и индикаторов их достижения в процессе освоения дисциплины (модуля).

Комплект заданий разработан таким образом, чтобы осуществить процедуру оценки каждой компетенции, формируемых дисциплиной (модулем), у обучающегося в письменной форме.

Содержание комплекта заданий включает: *тестовые задания, индивидуальные домашние задания, задания для контрольных работ.*

5.1. Типовая контрольная работа

Вариант 0

Задача 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения $x y' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x dy = -y dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем:

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$$y = \frac{C}{x}$$

- это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Задача 2.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$.

Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^C$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Задача 3.

$$y y' = \frac{-2x}{\cos y}$$

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y \cos y dy = -2x dx$$

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y \cos y dy = \int (u=y; dv=\cos y dy; \int u dv) = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается отличие общего (частного) интеграла от общего (частного) решения.

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной x .

$$y' \sin y + y y' \cos y - y' \sin y + 2x = 0$$

$$y y' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - верно}$$

Задача 4.

$$y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$$

Решить уравнение

Введем вспомогательную функцию u .

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u$$

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае

$$\ln u = \ln \frac{y}{x}$$

теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u \ln u + u; \quad u'x = u \ln u;$$

$$\text{Разделяем переменные: } \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\text{Интегрируя, получаем: } \ln |\ln u| = \ln |x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y , получаем общее решение:

$$y = x e^{Cx}$$

Задача 5.

$$\text{Решить уравнение } (x - 2y + 3) dy + (2x + y - 1) dx = 0.$$

Получаем $(x-2y+3)\frac{dy}{dx} = -2x-y+1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x-2y+3};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \end{cases}$

Применяем подстановку $x=u-1/5; y=v+7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$$

$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u+v}{2v-u} = \frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u} = t; v=ut; v' = t'u+t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u+t = \frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные: $\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2t}{1+t-t^2} dt; \quad \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1+t-t^2| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln|1+t-t^2| = -2 \ln|C_1 u|$$

$$\ln|1+t-t^2| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции u и переменной x .

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

5.2. Типовой тест

1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое неизвестная функция входит

- под знаком интеграла
- под знаком производной или дифференциала

- в). под знаком логарифма
- г). в неявном виде

2. Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ называется функция $y = y(x)$, если она

- а). удовлетворяет начальным условиям
- б). n раз дифференцируема на промежутке I
- в). монотонна на промежутке I
- г). обращает при подстановке уравнение в тождество

3. Общим интегралом дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ является семейство функций вида

- а). $\varphi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$
- б). $y = \varphi(x, c)$
- в). $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$
- г). $y = c_1 \varphi(x) + c_2$

4. Задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, формулируют следующим образом (укажите правильные варианты ответа):

- а). Найти решение $y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$
- б). Найти решение $y(x)$ такое, что $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$
- в). Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0)
- г). Найти семейство интегральных кривых вида $y = \varphi(x, c)$

5. Для приближенного построения интегральных кривых используется метод

- а). Изотерм
- б). Эйлера
- в). неопределенных коэффициентов
- г). изоклин

6. Уравнение семейства изоклин для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ имеет вид:

- а). $y = kx$
- б). $x^2 + y^2 = k, k \geq 0$
- в). $y = kx + b$
- г). $y = kx^2$

7. Функция $y = x(\sin x + 1)$ является решением уравнения:

- а). $xy' = y + x \sin x$
- б). $y' = (1 - y) \cos x$
- в). $y = x(y' - x \cos x)$
- г). $y' = \cos(y - x)$

8. Уравнениями с разделяющимися переменными являются уравнения вида:

- а). $f(y) dy = g(x) dx$
- б). $y' = f(x, y)$
- в). $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

г). $y' = g(x)p(y)$

9. Найдите общий интеграл уравнения $y' = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tgy}$:

а). $\operatorname{Siny} = c\operatorname{Cos}x$

б). $\frac{1}{\sin^2 y} = \frac{c}{\cos^2 x}$

в). $\operatorname{Siny} \operatorname{Cos}x = c$

г). $\operatorname{tgy} \operatorname{ctg}x = c$

10. Найдите общий интеграл уравнения $x(y^2 - 4) dx + ydy = 0$:

а). $\frac{y^2}{2} - 4 \ln y = \frac{x^2}{2} + c$

б). $y^2 - 4 = ce^{-x^2}$

в). $y^2 - 4 = ce^{x^2}$

г). $\sqrt{y^2 - 4} = ce^{x^2}$

Ключ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	б,в	а	б,в	г	б	в	а,г	в	в

5.3. Вопросы к зачету

1. ДУ первого порядка, его решение, геометрическое истолкование ДУ и его решений
2. Интегрирование ДУ первого порядка с разделяющимися переменными
3. Интегрирование однородных ДУ первого порядка
4. Интегрирование линейных ДУ первого порядка
5. Интегрирование ДУ Бернулли
6. Интегрирование ДУ первого порядка в полных дифференциалах
7. ДУ высших порядков, допускающих понижение порядка
8. Линейные однородные ДУ высших порядков.
9. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
10. общее решение при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения, его вещественная форма
11. Линейные неоднородные ДУ второго порядка, теорема о структуре общего решения, теорема о суперпозиции решений
12. Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения для правой части специального вида методом неопределенных коэффициентов
13. Обобщение результатов на линейные уравнения n-го порядка
14. Основные понятия о дифференциальных уравнениях n-го порядка
15. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости системы функций
16. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Общее и частное решение
17. Фундаментальная система решения. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка
18. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными
19. Построение общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами
20. Определение линейно зависимых и независимых функций. Первое свойство линейной зависимости

21. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка
22. Уравнение Бернулли
23. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка
24. Уравнение в полных дифференциалах
25. Решение линейных неоднородных уравнений второго порядка со специальной правой частью $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$
26. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными
27. Построение фундаментальной системы решений для ЛОУ второго порядка с постоянными коэффициентами ($D=0$)
28. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
29. Уравнения в полных дифференциалах
30. Теорема о суперпозиции решений линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
31. Задача Коши для дифференциальных уравнений n-го порядка. Теорема существования и единственности. Общее и частное решение
32. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка
33. Разностные (рекуррентные) уравнения второго порядка. Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Решение уравнения подстановкой.
34. Линейные разностные (рекуррентные) уравнения. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения. Уравнения с постоянными коэффициентами.